

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LX. esztendő

2023-2024. tanév

I. forduló Megoldások

9. évfolyam

1. Írjuk le egymás mellé 1-től kezdődően növekvő sorrendben a pozitív egész számokat. Mi a 2023. leírt számjegy?

Megoldás

Az egyjegyű számokkal 9 számjegyet írunk le.

A kétjegyű számokból (10-től 99-ig) 90 van, így ezek leírásához 180 számjegy szükséges.

A 2023. számjegy a háromjegyű számokhoz használt $2023 - 189 = 1834$. számjegy. Mivel $1834 = 611 \cdot 3 + 1$, ezért a keresett számjegy a 612. háromjegyű szám, azaz a 711 első számjegye, ami a 7.

2. Hány olyan nem egybevágó téglalap van, amelynek kerülete 2024 centiméter, és oldalai centiméterben mérve egész számok?

Megoldás

Jelölje x és y a téglalap egy csúcsba futó éleinek centiméterben vett hosszát! Ekkor $x + y = 1012$.

Ha $x = 1$, akkor $y = 1011$; ha $x = 2$, akkor $y = 1010$, stb. Így 1011 $(x; y)$ számpár elégíti ki az egyenletet. Ekkor azonban az $x = y = 506$ megoldáson kívül minden lehetőséget kétszer számoltunk, így $1 + 505 = 506$ lehetőség van.

3. Határozzuk meg azon polinom együtthatóinak összegét, amelyet úgy kapunk, hogy az

$$(1 + 7x - 7x^2)^{2023} \cdot (1 + x^6 - x^8)^{2024}$$

kifejezésben elvégezzük a kijelölt műveleteket és az összevonásokat.

Megoldás

Az együtthatók összegét úgy kapjuk meg, hogy a polinom 1 helyen vett helyettesítési értékét vesszük. Ezt a megadott szorzat alakba helyettesítve is megkaphatjuk:

$$(1 + 7 \cdot 1 - 7 \cdot 1^2)^{2023} \cdot (1 + 1^6 - 1^8)^{2024} = 1.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi tört nem egyszerűsíthető a semmilyen egész értéke mellett.

$$\frac{2a^3 + 3a}{a^2 + 1}$$

Megoldás

$$\frac{2a^3 + 3a}{a^2 + 1} = \frac{2a(a^2 + 1) + a}{a^2 + 1} = 2a + \frac{a}{a^2 + 1}$$

Egy tört pontosan akkor egyszerűsíthető, ha reciproka egyszerűsíthető, így az utóbbi kifejezés pontosan akkor egyszerűsíthető, ha $\frac{a}{a^2+1}$ reciproka is egyszerűsíthető.

$$\frac{a^2+1}{a} = a + \frac{1}{a}.$$

Így az eredeti tört pontosan akkor egyszerűsíthető, ha $\frac{1}{a}$ tört egyszerűsíthető, ami azonban nyilván nem egyszerűsíthető a semmilyen egész értéke esetén sem.

5. Egy körvonalon fölveszünk 2023 kék és 1 piros pontot. Vizsgáljuk az összes olyan sokszöget, amelynek csúcsai a felvett pontok közül valók. A piros csúcsot is tartalmazó, vagy a piros csúcsot nem tartalmazó sokszögekből van több?

Megoldás

Nevezzük kéknek a csak kék csúcsokat tartalmazó, és pirosnak a piros csúcsot tartalmazó sokszögeket!

Minden kék sokszöghöz párként hozzá tudjuk rendelni azt a sokszöget, amelyet a piros pont hozzávételével kapunk, így legalább annyi piros, mint kék sokszög van. Azonban a piros háromszögeknek nincs kék párjuk (hiszen csak két kék csúcsuk van), így a piros sokszögekből van több.

6. Timi babonás, és minden naptári év elején megnézi, hogy az adott évben hányszor fordul elő, hogy valamelyik hónap 13. napja péntekre esik. Lehet-e az élete során olyan naptári év, amelyben nincs péntek 13-a? Vegyük minden évben az előforduló péntek 13-ai napok darabszámának halmazát. Mi lesz ennek a halmaznak a legkisebb felső korlátja?

Megoldás

A hét napjait megfeleltetjük a 7-es maradékosztályoknak:

legyen hétfő az 1, kedd a 2, ... vasárnap a 0 maradékosztály.

Tegyük fel, hogy az adott évben január 13-a az x maradékosztályba esik ($0 \leq x \leq 6$). Ekkor a hónapok hosszát figyelembe véve - nem szökőév esetében azt kapjuk, hogy február 13-a és március 13-a az $x+3$ maradékosztályba esik, április 13-a az $x+6$ osztályba, május 13-a az $x+1$ osztályba, június 13-a az $x+4$ osztályba, július 13-a az $x+6$ osztályba, augusztus 13-a az $x+2$

osztályba, szeptember 13-a az $x+5$ osztályba, október 13-a az x osztályba, november 13-a az $x+3$ osztályba, és december 13-a az $x+5$ osztályba esik.

Szökőév esetében hasonló számolással kapjuk, hogy január, április és július hónapok 13-a az x maradékosztályba, február és augusztus 13-a az $x+3$ osztályba, március és november 13-a az $x+4$ osztályba, május 13-a az $x+2$ osztályba, június 13-a az $x+5$ osztályba, szeptember és december 13-a az $x+6$ osztályba, és október 13-a az $x+1$ osztályba esik.

Ebből a felsorolásból látható, hogy minden maradékosztály előfordul minden évben, vagyis nincs olyan év, amelybe ne lenne péntek 13-a.

Az is látszik, hogy minden maradékosztály legfeljebb háromszor fordul elő (és van olyan év, amelyben pontosan 3 darab van), ezért a keresett legkisebb felső korlát a 3.

10. évfolyam

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{x-23}{2000} + \frac{x-22}{2001} + \frac{x-21}{2002} + \frac{x-20}{2003} = \frac{x-2000}{23} + \frac{x-2001}{22} + \frac{x-2002}{21} + \frac{x-2003}{20}$$

Megoldás

Az egyenlet mindkét oldalán 4-4 tag van, melyekből, ha 1-et 1-et kivonunk mindegyik tag számlálójára $x - 2023$ lesz. Ezt követően az egyenletet 0-ra redukálva, majd $(x - 2023)$ -at kiemelve kapjuk, hogy

$$(x - 2023) \left(\frac{1}{2000} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} + \frac{1}{2003} - \frac{1}{23} - \frac{1}{22} - \frac{1}{21} - \frac{1}{20} \right) = 0$$

E kéttényezős szorzat második tényezője biztosan nem 0, így ezzel osztva az $x - 2023 = 0$ egyenletet kapjuk, abból pedig az egyenlet egyetlen megoldását, ami 2023.

2. Léteznek-e olyan a, b, c, d egész számok, amelyekre a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ harmadfokú függvény az $x = 7$ helyen 2024, az $x = 3$ helyen az 1998 értéket veszi föl?

Megoldás

$$f(7) = 343a + 49b + 7c + d = 2024$$

$$f(3) = 27a + 9b + 3c + d = 1998$$

E kettőt egymásból kivonva a következőt kapjuk:

$$f(7) - f(3) = 316a + 40b + 4c = 26$$

A kapott egyenlet bal oldala osztható 4-gyel, míg a jobb oldala nem, így nem léteznek ilyen a, b, c és d egész számok.

3. Adjunk meg egy olyan egész együtthatós egyenletet, amelynek egyik megoldása $\sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Megoldás

Legyen $x = \sqrt{3} + \sqrt{5}$, ahonnan $x^2 = 8 + 2\sqrt{15}$.

$x^2 - 8 = 2\sqrt{15}$, amit négyzetre emelve $x^4 - 16x^2 + 64 = 60$.

Így az $x^4 - 16x^2 + 4 = 0$ egyenlet megfelel a feladat feltételeinek.

4. Igazoljuk, hogy ha az

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$$

másodfokú egyenletnek két különböző valós megoldása van!

Megoldás

A zárójelek fölbontása és rendezés után az alábbi egyenletet kapjuk:

$$3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + ac + bc = 0$$

Ennek diszkriminánsa $D = 4(a + b + c)^2 - 12(ab + ac + bc) = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4ac - 4bc = 2(a - b)^2 + 2(b - c)^2 + 2(c - a)^2 \geq 0$, ahol az egyenlőség csak $a = b = c$ esetén teljesülhet. Ekkor az egyenletnek csak egy valós megoldása van. Ez pedig azt jelenti, hogy a feladat állítása csak akkor teljesül, ha a , b és c között van két különböző.

5. Határozza meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $8p^2 + 1$ is prímszám.

Megoldás

Ha $p = 3$, akkor $8p^2 + 1 = 73$, ami prímszám.

Ha $p \neq 3$, akkor $p = 3k \pm 1$ alakú ($k \in \mathbb{Z}^+$), így $8p^2 + 1 = 8(3k \pm 1)^2 + 1 = 72k^2 \pm 48k + 9$, ami bármely k esetén osztható 3-mal, így nem lehet.

6. Az ABC derékszögű háromszög beírt köre az AB átfogót a P pontban érinti. Legyen $AP = p$ és $PB = q$. Fejezzük ki az ABC háromszög területét p és q függvényében.

Megoldás

Jelölje r a háromszög beírt körének sugarát. A háromszög területe $T = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$, és mivel $AB = c = p + q$, $AC = b = p + r$, $BC = a = q + r$, ezért $T = r(p + q + r)$.

Az ABC háromszögre felírt Pitagorasz tétel alapján $(p + q)^2 = (p + r)^2 + (q + r)^2$, ahonnan a zárójelek felbontása és rendezés után $pq = r(p + q + r)$. Így $T = pq$.

11. évfolyam

1. Gyöktelenítsük az alábbi tört nevezőjét.

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}}$$

Megoldás

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}} &= \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (2 + \sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{5}}{(-4 + 2\sqrt{6}) - (4\sqrt{5})} = \\&= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{5})(-4 + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{5})}{(-4 + 2\sqrt{6})^2 - (4\sqrt{5})^2} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{5})(-4 + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{5})}{-40 - 16\sqrt{6}} = \\&= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{5})(-4 + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{5})(-40 + 16\sqrt{6})}{(-40 - 16\sqrt{6})(-40 + 16\sqrt{6})} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{5})(-4 + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{5})(-40 + 16\sqrt{6})}{64} = \\&= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{5})(-2 + \sqrt{6} + 2\sqrt{5})(-5 + 2\sqrt{6})}{4}\end{aligned}$$

Megjegyzés: A végeredmény egy másik egyszerűsített alakja: $\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{5})(\sqrt{6} + 2 + 2\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})}{-4}$

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$0,6^{\log_2 x} + \left(1\frac{2}{3}\right)^{\log_2 x} = \frac{34}{15}$$

Megoldás

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_2 x} + \left(\frac{5}{3}\right)^{\log_2 x} = \frac{34}{15}$$

Legyen $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_2 x}$, ekkor az eredeti egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$a + \frac{1}{a} = \frac{34}{15}$$

Innen $a_1 = \frac{3}{5}$ és $a_2 = \frac{5}{3}$.

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_2 x} = \frac{3}{5}$, ahonnan az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $\log_2 x = 1$, ahonnan $x = 2$.

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_2 x} = \frac{5}{3}$, ahonnan az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $\log_2 x = -1$, ahonnan $x = \frac{1}{2}$.

3. Hány olyan 2023-nál kisebb n pozitív egész szám van, amelyre a $\frac{4n+3}{13n+2}$ tört egyszerűsíthető?

Megoldás

A $\frac{4n+3}{13n+2}$ tört pontosan akkor egyszerűsíthető, ha a reciproka, azaz $\frac{13n+2}{4n+3} = 3 + \frac{n-7}{4n+3}$ egyszerűsíthető. Ez utóbbi viszont pontosan akkor egyszerűsíthető, ha $\frac{4n+3}{n-7} = 4 + \frac{31}{n-7}$ egyszerűsíthető. Ez csak akkor egyszerűsíthető, ha $n - 7 = 31k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$), azaz $n = 7 + 31k$. A feladat feltételéből dódóan $0 < 7 + 31k < 2023$, ahonnan $-\frac{7}{31} < k < \frac{2016}{31}$, azaz $0 \leq k < 66$. Tehát a feladatnak 66 egész szám tesz eleget.

4. Adjunk meg egy olyan egész együtthatós egyenletet, amelynek egyik megoldása $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$.

Megoldás

Legyen $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$, ahonnan köbre emeléssel és rendezés után $x^3 - 5 = 3\sqrt[3]{12} + 3\sqrt[3]{18}$.

Ezt újra köbre emelve kapjuk, hogy $x^9 - 15x^6 + 75x^3 - 125 = 810 + 486\sqrt[3]{12} + 486\sqrt[3]{18}$.

A második egyenletből kivonva az első 162-szeresét, eltűnnek az irracionális tagok, s kapjuk, hogy $x^9 - 15x^6 - 87x^3 + 685 = 810$. Ebből rendezés után kapjuk, hogy

$$x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125 = 0$$

5. Határozzuk meg az összes olyan n és k természetes számot, amelyre teljesül az alábbi egyenlet.

$$\binom{n}{k} = n^k$$

Megoldás

A $k=0$ és a $k=1$ esetben minden n pozitív egész szám megoldás. Ha $k \geq 2$, akkor érvényes az alábbi egyenlőtlenség:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} < \frac{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}{k!} = \frac{n^k}{k!} < n^k$$

Eszerint egyenlőség nem állhat fenn $\binom{n}{k}$ és n^k között, ha $k \geq 2$. A megoldás tehát $k \in \{0; 1\}$ és $n \in \mathbb{N}^+$.

6. Van-e olyan derékszögű háromszög, amelynek a, b és c oldalhosszaira teljesül az $a^3 + b^3 = c^3$ egyenlőség?

Megoldás

A feladat feltétele csak úgy teljesülhet, ha c az átfogó. Ekkor az $a^3 + b^3 = c^3$ egyenlőség mindkét oldalát osszuk el c^3 -nal, így a háromszög a oldallal szemközti α szögére a következő egyenletet kapjuk:

$$(\sin \alpha)^3 + (\cos \alpha)^3 = 1$$

Ez viszont nem lehetséges, mert $0 < \sin \alpha, \cos \alpha < 1$, és így $(\sin \alpha)^3 + (\cos \alpha)^3 < (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$. Tehát nincs olyan derékszögű háromszög, amely megfelel a feltételnek.

12. évfolyam

1. Határozzuk meg az m paraméter összes olyan egész értékét, amelyre a

$$\frac{2x^2 + mx + 2m + 2}{x^2 + 2mx + 2m^2 + 1} > 1$$

egyenlőtlenség minden valós x esetén teljesül.

Megoldás

A bal oldali tört nevezője bármely valós x esetén pozitív, ugyanis

$$x^2 + 2mx + 2m^2 + 1 = (x + m)^2 + m^2 + 1 > 0.$$

Ebből következően az egyenlőtlenség irány nem változik, ha mindkét oldalt megszorozzuk a nevezővel. Beszorzás és 0-ra rendezés után kapjuk:

$$x^2 - mx - 2m^2 + 2m + 1 > 0.$$

Mivel ennek az egyenlőtlenségnek minden valós x esetén teljesülnie kell, ezért a bal oldali másodfokú kifejezés diszkriminánsának negatívnak kell lennie. Felírva a diszkriminánst, ekvivalens átalakítások után kapjuk, hogy

$$9m^2 - 8m - 4 < 0.$$

A bal oldal zérushelyei: $m_1 = \frac{4 - 2\sqrt{13}}{9}$, $m_2 = \frac{4 + 2\sqrt{13}}{9}$. Az eredeti egyenlőtlenség tehát akkor

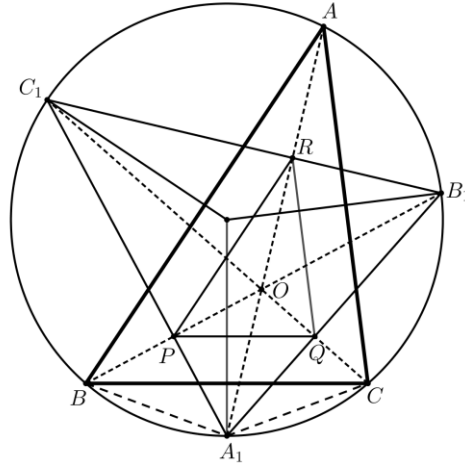
teljesül minden valós x esetén, ha $\frac{4 - 2\sqrt{13}}{9} < m < \frac{4 + 2\sqrt{13}}{9}$. Mivel m megfelelő egész értékeit

keressük, és csak az $m = 0$ és az $m = 1$ teljesíti a feltételeket, ezért ez a két érték a megoldás a feladatra.

2. Az ABC hegyesszögű háromszög BC oldalának felezőmerőlegese a háromszög köré írható kör A csúcsot nem tartalmazó BC ívét A_1 -ben metszi. Hasonló módon kapjuk a B_1 és C_1 pontokat. Legyen O a háromszög beírható körének középpontja. Az OB és az A_1C_1 szakaszok metszéspontja P , az OC és az A_1B_1 szakaszok metszéspontja Q , az OA és a B_1C_1 szakaszok metszéspontja pedig R . Bizonyítsuk be, hogy a PQR háromszög hasonló az eredeti ABC háromszöghöz.

Megoldás

Tekintsünk egy, a feltételeknek megfelelő ábrát.



A feltételeknek megfelelően A_1 , B_1 , C_1 a megfelelő ívek felezőpontjai. Az ABC háromszög belső szögfelezői a kerületi szögek tételéből adódóan szintén illeszkednek a szemközti oldalhoz tartozó ív felezőpontjára, azaz rendre az A_1 , B_1 , C_1 pontokra.

Jelölje az ABC háromszög szögeit a szokásoknak megfelelően α , β , γ . Belátjuk, hogy a PQR háromszög szögei rendre megegyeznek az ABC háromszög szögeivel.

Az azonos íven nyugvó kerületi szögek egyenlőségét felhasználva kapjuk, hogy az A_1CQ háromszög két szöge: $QA_1C\angle = \frac{\beta}{2}$, $A_1CQ\angle = \frac{\alpha + \gamma}{2}$. Mivel ezek összege 90° , ezért

$CQA_1\angle = OQA_1\angle = 90^\circ$. Hasonló gondolatmenetet alkalmazva az A_1PB háromszögre kapjuk, hogy $A_1PB\angle = OPA_1\angle = 90^\circ$. Ez viszont a húrnégyszögek tételének megfordítása alapján azt jelenti, hogy az OPA_1Q négyszög húrnégyszög. Ezt és a kerületi szögek tételét alkalmazva kapjuk, hogy $PQO\angle = PA_1O\angle = C_1A_1A\angle = C_1CA\angle = \frac{\gamma}{2}$.

Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy B_1ROQ négyszög is húrnégyszög, amiből következik a kerületi szögek tételét többször alkalmazva, hogy $OQR\angle = \frac{\gamma}{2}$. Ezek szerint a PQR háromszögben $PQR\angle = \gamma$.

A PQR háromszög másik két szögéről ugyanilyen módon belátható, hogy azok α -val, illetve β -val egyenlők. Ezzel beláttuk a feladat állítását.

Megjegyzés: A bizonyításból az is kiderül, hogy a két hasonló háromszög megfelelő oldalai párhuzamosak.

3. Melyek azok a kétjegyű pozitív egész számok, amelyek négyzetéből levonva a számjegyek felcserélésével kapott kétjegyű szám négyzetét, pozitív négyzetszámot kapunk?

Megoldás

Keressük a megfelelő kétjegyű számokat $\overline{ab} = 10a + b$ alakban. A feltétel szerint

$$(10a + b)^2 - (10b + a)^2 = k^2,$$

ahol k pozitív egész szám. A négyzetre emeléseket elvégezve és a bal oldalt szorzattá alakítva kapjuk a

$$9 \cdot 11 \cdot (a-b) \cdot (a+b) = k^2$$

egyenletet.

Mivel 9 négyzetszám, ezért $11(a-b)(a+b)$ -nek is négyzetszámmal kell lennie. Figyelembe véve, hogy a és b pozitív számjegyek, három lehetőségünk van.

1. $a+b=11$, $a-b=1$. Ebből $a=6$, $b=5$, és ez valóban megoldás, ugyanis $65^2 - 56^2 = 1089 = 33^2$.
2. $a+b=11$, $a-b=4$. Ez az eset nem lehetséges, mert $a+b$ és $a-b$ paritása nem egyezik meg.
3. $a+b=11$, $a-b=9$. Ez az eset sem valósulhat meg, ugyanis két pozitív számjegy különbsége kisebb 9-nél.

Az egyetlen megoldás tehát a 65.

4. Az $x^2 + y^2 - 4x - 8y + p = 0$ és $x^2 + y^2 - 24x - 16y + q = 0$ egyenletű körök kívülről érintik egymást. E két körhöz a $P(6; 0)$ pontból húzható érintők ugyanakkora szöget zárnak be egymással. Számítsuk ki a két kör sugarát.

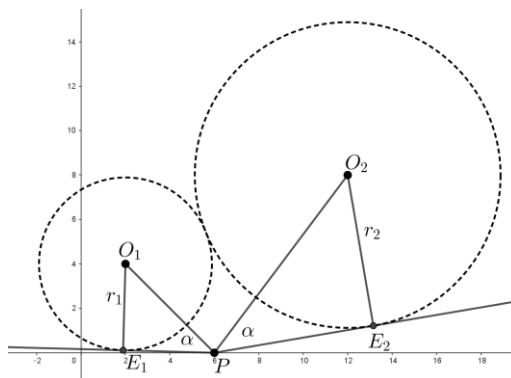
Megoldás

A két kör egyenlete átrendezve:

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 20-p \text{ és } (x-12)^2 + (y-8)^2 = 208-q.$$

Innen $O_1(2; 4)$, $r_1 = \sqrt{20-p}$, $O_2(12; 8)$, $r_2 = \sqrt{208-q}$. Mivel a két kör kívülről érinti egymást, ezért $r_1 + r_2 = O_1O_2 = \sqrt{116}$.

Ha egy P pontból az egyik körhöz húzott érintők hajlásszöge megegyezik a másik körhöz húzott érintők hajlásszögével, akkor e szögek fele is egyenlő egymással, azaz az alábbi ábrán látható eset valósul meg.



A PO_1E_1 és PO_2E_2 derékszögű háromszögek hasonlóak, ezért

$$\frac{r_1}{O_1P} = \frac{r_2}{O_2P}.$$

Mivel $O_1P = 4\sqrt{2}$, $O_2P = 10$ és $r_1 + r_2 = \sqrt{116}$, ezért a megfelelő behelyettesítések után kapjuk

a keresett sugarakat: $r_1 = \frac{4\sqrt{58}}{5+2\sqrt{2}}$, $r_2 = \frac{10\sqrt{29}}{5+2\sqrt{2}}$.

5. Egy háromszögben az oldalak hossza a, b, c , a köré írt kör sugara R . Mekkora a háromszög területe, ha $R \cdot (a+b) = c \cdot \sqrt{a \cdot b}$, és a leghosszabb oldal hossza 1?

Megoldás

A háromszög oldala, az oldallal szemközti szöge és a köré írt kör sugara közötti összefüggés szerint $c = 2R \sin \gamma$. Ebből fejezzük ki R -t, és írjuk be a feltételi egyenletbe:

$$\frac{c \cdot (a+b)}{2 \sin \gamma} = c \cdot \sqrt{ab},$$

ahonnan

$$\frac{a+b}{2} = \sin \gamma \cdot \sqrt{ab}.$$

Közismert tény, hogy $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a=b$. Ez alapján a feltétel átalakításával kapott egyenlet pontosan akkor teljesül, ha $a=b$ és $\sin \gamma = 1$, azaz $\gamma = 90^\circ$.

Kaptuk, hogy a háromszög egyenlő szárú és derékszögű, leghosszabb oldala az átfogója (c), és ennek hossza 1. Így a terület

$$T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

6. Igaz-e, hogy minden pozitív egész n esetén van $2n+1$ darab egymást követő természetes szám, hogy ezek közül az első $n+1$ darab négyzetének összege egyenlő az ezeket követő n darab négyzetének összegével? (A választ indokolni kell.)

Megoldás

A kérdésre a válasz: igaz.

Legyen n tetszőleges pozitív egész szám és a $2n+1$ darab egymást követő természetes szám közül a középsőt jelölje a . Ezzel a négyzetösszegre vonatkozó feltétel:

$$(a-n)^2 + (a-(n-1))^2 + \dots + a^2 = (a+1)^2 + (a+2)^2 + \dots + (a+n)^2.$$

A négyzetre emelések, a lehetséges összevonások, a mindkét oldalon előforduló tagok elhagyása és egyszerűsítés után az első n darab pozitív egész összegére vonatkozó formulát alkalmazva kapjuk, hogy

$$a = 4 \cdot (1+2+\dots+n) = 4 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 2n \cdot (n+1) = 2n^2 + 2n.$$

Kaptuk, hogy tetszőleges pozitív egész n esetén a megfelelő $2n+1$ darab egymást követő természetes szám: $2n^2 + n$; $2n^2 + n + 1$; ...; $2n^2 + 2n$; ...; $2n^2 + 3n$.